高等数学 复习提纲（经管类）含复习题

一、　第一章 函数、极限、连续

1. 求下列函数的定义域：（记住四个条件）

（1） y=$\frac{1}{x-1}+\sqrt{2x+1}$

解：$\begin{cases} x-1\neq 0 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases}$　　∴D: $[-\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$

（2） ln（x^2-1）

解：$x^2-1>0$ ，$x>1$　　∴D:（1，+∞）

（3） y=arcsin$\frac{2x-1}{3}$

解：$-1\leq\frac{2x-1}{3}\leq 1$ ，$-1\leq x\leq 2$　∴D: [-1,2]

2. 计算下列极限：（记住两个重要极限公式）

① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x-3}$　（分母为零，不能直接用求商法则，不是“$\frac{0}{0}$”型，也不能用**洛必达法则**）

解：先求倒数：

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x+3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{0}{6}=0$

∴原式 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x-3}=\infty$

记住：

$\frac{1}{0}\to\infty$　无穷大量

$\frac{1}{\infty}\to 0$　无穷小量

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x\cdot\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\cdot\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}$

$=2$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^x]^{\frac{x}{2}}$

$$=[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$

在$x=0$处连续，则α=（　）

A、-1　　B、1　　C、2　　D、3

解:当$x=0$时

右极限：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0^{+}}\frac{3x}{x} = 3$

左极限：$\lim_{x\to 0^{-}}\alpha = \alpha$

∵ f(x)在$x=0$处连续

∴ 左极限=右极限

即α=3　选 D

（注意：若函数 f(x)在 x=0 处左右极限值不等，则 f(x)在该点处间断。）

二、　第二章 导数与微分

4. 求下列函数的倒数或微积分

（1）$y=2^{x}+x^{2}+2$

解：$y'=2^{x}\ln 2+2x$

（2）已知 $f(x)=x\cdot e^{x}$，求 $y'(1)$

解：$f'(x)=x'\cdot e^{x}+x\cdot(e^{x})'=e^{x}+x\cdot e^{x}=e^{x}(1+x)$

∴ $f'(1)=e'(1+1)=2e$

（3）设 $y=\ln\cos x$，求dy。（即求“复合函数”的微分）

“复合函数”求导法则：由外向里，层层求导相乘。

解：$y'=\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-\tan x$

∴ $dy=y'dx=-\tan x dx$

（4）设 $y=\sin 2x$，求 y''

解：$y'=\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x$

$y''=(2\cos 2x)'=2\cdot(-\sin 2x)\cdot(2x)'$

$=-2\sin 2x\cdot 2=-4\sin 2x$

（5） 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3xy=1$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}\mid_{x}=0$（隐函数求导题）

解法：①两边求导，将 y 看作中间变量

②再用复合函数求导，解出 y'（答案中允许保留 y）

解：本题先将等式两边求导，得 y'，再将 x=0 代入原方程得 y 值，再将 x、y 值代入 y'式中求其值。

①等式两边求导，得 $3x^2+3y^2\cdot y-3y-3xy'=0$

$\therefore y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$ （即 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$）

②当 x=0 时，代入原方程，得

$0^3+y^3-3\cdot 0\cdot y=1$ ， $y^3=1$ $\therefore y=1$

将 x=0，y=0 代入 y'，得

$\frac{dy}{dx}\mid_{x}=0=\frac{1-0^2}{1^2-0}=1$

三、 第三章 导数的应用

5. 求下列函数极限

（1）求 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-8}$ （“$\frac{0}{0}$”型)

解：原式 $\overset{\text{上、下求导}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+1}{3x^2}\overset{\text{用 x=2 代入}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{5}{12}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln 3x}{\ln 5x}$ （“$\frac{\infty}{\infty}$”型）

解：原式 $\overset{\text{上、下求导}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3x}\cdot 3}{\frac{1}{5x}\cdot 5}=1$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ （“$\infty-\infty$”型）

解：原式 $\overset{\text{化简、通分}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$

$\overset{\text{上、下求导}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}$ （“$\frac{0}{0}$”型)

再上、下求导

============$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+x\cdot e^x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$

6. 函数 y= f(x)在点 x=0 处的二阶导数存在，且 f'(0)=0，f''(0) >0，则下列结论正确的是（　）

A.x=0 是函数 f(x)的极小值点

B. x=0 是函数 f(x)的极大值点

C. x=0 不是函数 f(x)的驻点

D. x=0 不是函数 f(x)的极值点

解：判别方法：$f''(x_0)=0$（有驻点，即该方程的根）

当 $f''(x_0)>0$ 时，f(x)有极小值点

当 $f''(x_0)<0$ 时，f(x)有极大值点

（注意，当 f''(x)=0 时，f(x)有拐点）

本题是 f(x)在 x=0 时的二阶导数存在 f''(0)＞0

∴选 A

7. 设函数 f(x)在区间（a,b）内满足 f'(x)＞0，且 f''(x)＜0，则函数在此区间内是（　）

A. 单调减少且凹的　　　　B.单调减少且凸的

C. 单调增加且凹的　　　　D.单调增加且凸的

解：判别方法：f'(0)＞0，判单调增加

f'(0)＜0，判单调减少

f''(0)＞0，图像是凹的

f''(0)＜0，图像是凸的

本题是：f'(x)＞0，↗，f''(x)＜0，凸的

∴选 D

8. 求函数 $f(x)=x^4-10x^2+5$的极值。

解：（1）定义域为（-∞，+∞）

∵$f'(x)=4x^3-20x=4x(x^2-5)$

令 $f'(x)=0$，即 $4x(x^2-5)=0$

解之得：$x_1=0$，$x_2=\sqrt{5}$，$x_3=-\sqrt{5}$（三个驻点）

（2）求 $f''(x)$.　　$f''(x)=[4x(x^2-5)]'=12x^2-20$

∴$f''(0)=-20<0$

$f''(\sqrt{5})=12(\sqrt{5})^2-20>0$

$f''(-\sqrt{5})=12(-\sqrt{5})^2-20>0$

∴当 $x=0$ 为极大值点，极大值为 $f(0)=0^4-10(0)^2+5=5$

$x=\sqrt{5}, x=-\sqrt{5}$ 为极小值点

极小值为：$f(\sqrt{5})=(\sqrt{5})^4-10(\sqrt{5})^2+5=-20$

$f(-\sqrt{5})=(-\sqrt{5})^4-10(-\sqrt{5})^2+5=-20$

9. 求曲线 $y=x^2$在（1，1）处的切线方程和法线方程。

解：斜率：$K=y'=(x^2)'=2x$，当 $x=1$ 时，$y'(1)=2\times1=2$

∴①切线方程为 $y-1=2(x-1)$ [即 $y-y_0=k(x-x_0)$,其中x_0，y_0即题目(1,1)的坐标]

化简为 $y=2x-1$

②法线方程[$y-y_0=\frac{-1}{k}(x-x_0)$]

$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

四、　第四章 不定积分

10. 设$e^x+\sin x$是 $f(x)$的原函数，求 $f'(x)$

(注意“不定积分”的重要概念：被积函数=原函数的导数)

解：$f(x)=(e^x+\sin x)'=e^x+\cos x$

$\therefore f'(x)=(e^x+\cos x)'=e^x-\sin x$

11. 求$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$　(直接套用公式计算)

解:原式=$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{(-\frac{1}{2}+1)}+C=2x^{\frac{1}{2}}+C$

12. 求$\int \sin(3x+2)\,dx$（“凑微分法”）

解：原式=$\frac{1}{3}\int \sin(3x+2)\ d(3x+2)$ 当成大 **x**，用公式套

$=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C$

13. 求$\int \frac{\ln x}{x}dx$

解：原式=$\int \ln x\, d(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$

14. 求$\int xe^{x^2}\,dx$　(凑微分：$xdx=\frac{1}{2}dx^2$ 记牢！)

解：原式=$\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

15. 求$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$（“根式代换法”）

解：令$\sqrt{x-1}=t$，$x=1+t^2$，$dx=2tdt$

则$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt$

$=2\int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt$

$=2\int (1-\frac{1}{1+t^2})dt=2(t-\arctan t)+C$

$\overset{\text{将 t 换回}\sqrt{x-1}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}2(\sqrt{x-1}-\arctan t\sqrt{x-1})+C$

16. 求$\int x\cdot e^x\,dx$(“分部积分法”)

解：原式=$\int x\cdot de^x$

$=x\cdot e^x-\int e^x\,dx=x\cdot e^x-e^x+C$

$\left.\begin{array}{l}\text{17. 求}\int x\ln x\,dx\\ \text{18. 求}\int e^x\cos x\,dx\end{array}\right\}$自己练习！

注意：1.本章最基本的计算方法中“凑微分”、“根式代换”、“分部代换”是重点，必须熟练运算，尤以“凑微分”法应用广泛。

2.不定积分中原函数概念，基本性质，计算公式熟记。

五、　第五章 定积分

"解法"注意四点：

1. 定积分与积分字母无关，计算后要将上、下限带进去相减，结果无 C
2. 变上限的导数=被积函数，即$(\int_0^x f(x)\,dx)'= f(x)$
3. 换元法中换元必须换限
4. 对称区间中：奇函数的定积分值为 0

偶函数的定积分值为 $2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

19. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \sin t\,dt}{\int_0^x t\,dt}$

解：原式$\xlongequal{\text{上、下求导}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$

20. 求$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sin t^2 dt$　　[即求$(\int_0^{x^2}\sin t^2 dt)'$]

解：原式=$(\int_0^{x^2}\sin(x^2)^2 d(x^2))'$

$=\sin x^4\cdot(x^2)'$

$=2x\sin x^4$

21. 设$F(x)=\int_x^{\alpha}\arcsin t\,dt$　则$F'(0)=?$

解：$F(x)=-\int_{\alpha}^{x}\arcsin t\,dt$

$\therefore F'(x)=-\arcsin t$，$F'(0)=-\arcsin 0=0$

22. 求$\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}dx$

解：原式=$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$

$\xlongequal{\text{用公式套}}\ln(1+e^x)\mid_{-1}^{1}$

$=\ln(1+e)-\ln(1+\frac{1}{e})$

$=\ln\left|\frac{1+e}{1+\frac{1}{e}}\right|=\ln\left|\frac{1+e}{\frac{1+e}{e}}\right|=\ln e=1$

23. 计算$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$　（"换元法"）

解：令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2t\,dt$

列表：

x	0, 4
t	0, 2

，于是

(换限)

$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}dt$

$=2\int_0^2 (1-\frac{1}{1+t})dt$

$=2(t-\ln|1+t|)^2$=4-2ln 3

24. 计算$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^5 \sin^2 x}{1+x^2+x^4} dx$

解：$\because \frac{x^5 \sin^2 x}{1+x^2+x^4}$(分子为奇函数，分母为偶函数，为奇函数)

(用-X 代入每个函数看符号判断奇偶性，即若 f(-x)= f(x)为偶函数，f(-x)=-f(x)为奇函数。本题是对称区间的定积分，被积函数为奇函数。)

∴原式=0

25. 计算$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\, dx$ (分部积分法)

解：原式=$(x \cdot \arctan x) \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x d(\arctan x)$

$= \sqrt{3} \cdot \arctan \sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx$

$=\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) \Big|_0^{\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2$

26. 求下列“反常函数”(或称“广义积分”)

①求$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

解：原式=$\arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

∴此积分收敛

②判断$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$的收敛性

解：原式=$\int_0^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_0^{+\infty}$，$\ln(+\infty)$不存在

∴此积分发散(无积分值)

27.证明$\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2}$ $(x>0)$

分析：证明题一定要仔细研究等式两边的差异，然后找出着眼点，此题的被积函数完全一样，只是上、下限互为倒数因此应考虑作$x=\frac{1}{t}$的代换。

证：令$x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

当下限为x时，$t=\frac{1}{x}$；当上限为 1 时，$t=1$

∴左边：$\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$= -\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{\frac{t^2+1}{t^2}} \cdot \frac{1}{t^2}dt = -\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{t^2+1}dt$

$=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2+1}dt \xlongequal{\text{与积分变量字母无关}} \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x^2}dx$ = 右边

类似题：(自习)：设 f(x)为连续函数，证明$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

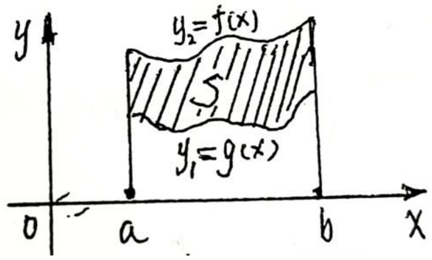
(提示：设$x=\pi-t$，则$\sin x=\sin(\pi-t)=\sin t$，$dx=dt$)

六、 第六章 定积分的应用

定积分的应用主要有平面图形面积和旋转体体积的计算。

1.“平面图形”面积计算

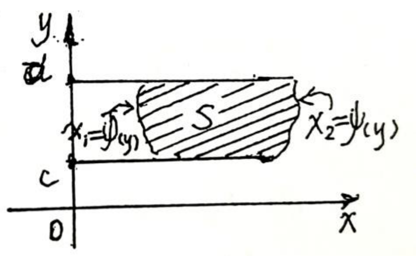
1)在 x 轴上积分:



$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx$

计算口诀：“上下曲，上头减下头”

2)在 y 轴上积分:



$S=\int_c^d[\varphi_{(y)}-\varphi_{(y)}]\,dy$

注意：将 x 改成 y 的函数(反函数)积分变量为 dy

口诀：“左右曲，右头减左头”

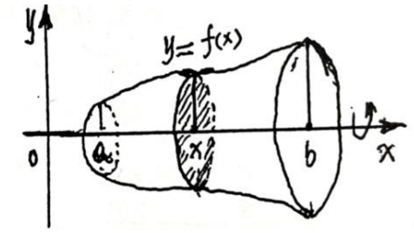
2.“旋转体”体积

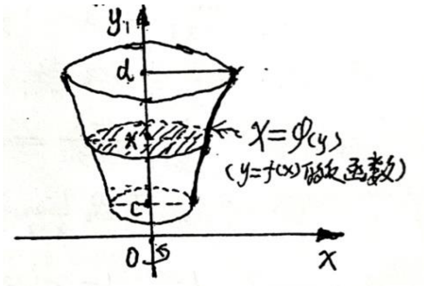
1)在 x 轴上积分:

(绕 x 轴旋转)

2)在 y 轴上积分:

(绕 y 轴旋转)





计算公式：

$V_x=\int_a^b \pi f^2(x)\ dx=\pi\int_a^b f^2(x)\ dx$　　　　$V_y=\int_c^d \pi\varphi^2{}_{(y)}dy=\pi\int_c^d \varphi^2{}_{(y)}dy$

28.求直线 y=x 及抛物线 $y=x^2$所围成的平面区域的面积

解：(1)画出 y=x，$y=x^2$所围成的平面区域

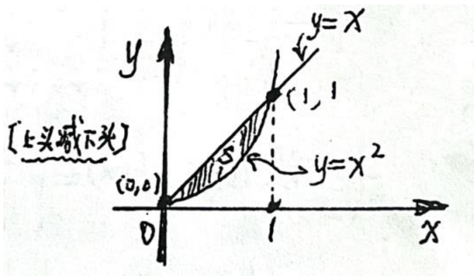
(2)解方程组$\begin{cases} y=x & ① \\ y=x^2 & ② \end{cases}$，

①式代入②，得- x=0，$x(x-1)=0$,解之得x=0，x=1

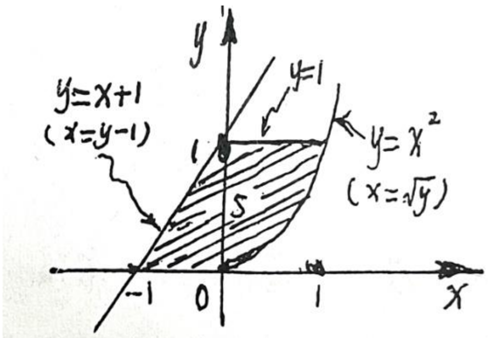
得交点(0，0)与(1，1)

(3) $S=\int_0^1 (x-x^2)\,dx$

$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$



29.求曲线 y=x+1，$y=x^2(x\geq0)$，y=1 与 x 轴所围成的平面图形的面积



解：此题显然在 y 轴上积分较方便

$S=\int_0^1[\sqrt{y}-(y-1)]\,dy$ (右头减左头)

$=\int_0^1\left(y^{\frac{1}{2}}-y+1\right)dy$

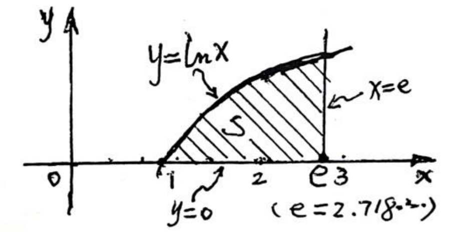
$=\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y^2+\ y\right)\Big|_0^1$

$=(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+1)-0=\frac{7}{6}$

注意：1.以上两例皆是在直角坐标系中计算得平面图形面积。

30.求直线 y=0，x=e 及曲线 y=ln x所围成的平面图形面积及该平面图形绕 x 轴旋转一周所取得旋转体的面积。

解：分析并做图：y=0 即 x 轴，x=e 是过 e 点的一条直线(与 y 轴平行)、y=ln x[对数函数性质决定与 x 轴交点为(1，0)]



∵x=1 时，ln x=ln 1=0，可知图形中 x 的变化范围为[1，e]

∴①$S_x=\int_1^e[(\ln x-0)]\,dx$

$=\int_1^e \ln x\,dx$(用“分部积分法”)

$=x\cdot\ln x\,\Big|_1^e-\int_1^e x\,d(\ln x)=e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=e-x\,\Big|_1^e=e-e+1=1$

②$V_x=\pi\int_1^e y^2\,dx=\pi\int_1^e \ln^2 x\,dx=\pi[x\ln^2 x\,\Big|_1^e-\int_1^e x\,d(\ln^2 x)]$

$=\pi e-\int_1^e x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\pi e-2\pi\int_1^e \ln x\,dx$

$=\pi e-2\pi\cdot 1=\pi e-2\pi$

九、第九章 多元函数微积分

一、偏导数与全微分的计算：

包括复合函数，隐函数及抽象函数的偏导数计算。

(1) 在偏导数计算中，求$\frac{\partial z}{\partial x}$时，变量 y 当作常量，且$\frac{\partial z}{\partial y}$时，变量 x 当作常量，按一元函数求导公式计算即可。

(2) 全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}$，只需计算两个偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$即可。

(3) 对于由方程 F(x,y,z)=确定的隐函数 z=z(x，y)，其求偏导数。通常有两种方法：

①公式法：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$

注意：在求$\frac{\partial F}{\partial x}$时，F(x,y,z)中的 y、z 均作为常数，按一元函数求导。

求$\frac{\partial F}{\partial y}$时，F(x,y,z)中的 x、z 均作为常数，按一元函数求导。

求$\frac{\partial F}{\partial z}$时，F 中的 x,y 也看做常数。

②直接求导法：对所给方程两边，分别对 x，y 求偏导，在对 x 求偏导时，y 作为常数，而 z 是 x，y 的复合函数，利用复合函数求导公式计算，然后从方程中解出$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

31.设 $z=\frac{1}{xy}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$ (即$\frac{\partial F(x,y,)}{\partial x}$)

解：提示：求$\frac{\partial z}{\partial x}$，可以将 y 认作常数，只需对$\frac{1}{x}$关于 x 求导，再乘系数$\frac{1}{y}$即可

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2y}$$

32.已知二元函数 $z=\ln(x+y^2)$，求$dz\,\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$

(本题是求函数 z 在指定点处的全微分)

解：$\because\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$

且：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=\frac{1}{1+0^2}=1$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2\times 0}{1+0^2}=0$

故：$dz\,\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=dx$

33.设 Z=Z(x,y)由方程e^z-xyz=0 所确定，试求 dz(即求二元函数隐函数的微分)

解：设 F(x,y,z)=(e^z-xyz)

等式两边求导：$\frac{\partial F}{\partial X}\overset{\text{y、z 看作常数}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}-yz$

$\frac{\partial F}{\partial y}=-xz$， $\frac{\partial F}{\partial z}=e^z-xy$

$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'x}{F'z}=-\frac{-yz}{e^z-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'y}{F'z}=\frac{-xz}{e^z-xy}$

则$dz=\frac{yz}{e^z-xy}dx+\frac{xz}{e^z-xy}dy$

二、二阶偏导数(二阶及二阶以上称高阶导数)

二元函数 z= f(x,y,)的二阶偏导数共有 4 种：

(1) $(\frac{\partial z}{\partial x})'_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$[或$f''_{xx}(x,y)$、$Z''_{xx}$]对$\frac{\partial z}{\partial x}$再次对 x 求导，y 为常数

(2) $(\frac{\partial z}{\partial x})'_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$[或$f''_{yy}(x,y)$、$Z''_{yy}$]即对$\frac{\partial z}{\partial y}$再次对 y 求导，y 为常数

(3) $(\frac{\partial z}{\partial y})'_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$[或$f''_{xy}(x,y)$、$Z''_{yx}$]将$\frac{\partial z}{\partial x}$对 x 求导，y 为常数

(4) $(\frac{\partial z}{\partial y})'_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$[或$f''_{xy}(x,y)$、$Z''_{xy}$]将$\frac{\partial z}{\partial x}$对 y 求导，x 为常数

解法：先求一阶偏导数，再依题意确定对 x(或 y)继续求偏导数。注意求解时将相对的 y(或 x)当作常数。

34 设 $Z=y\ln x$，求二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

解：先求一阶偏导数：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln x$

则$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y'\cdot x-y\cdot(x)'}{x^2}=\frac{0\cdot x-y\cdot 1}{x^2}=-\frac{y}{x^2}$

$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(\frac{y}{x})'_y=\frac{1}{x}\cdot y'=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}$

$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\ln x)'_y=0$

35.设 $Z=xe^x\sin y$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y+x\cdot e^x\sin y$(y 为常数)$=e^x(1+x)\sin y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^x\cos y$($xe^x$为常数)

故$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=e^x(1+x)\cos y$　　[$e^x(1+x)$为常数]

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=e^x\cos y+xe^x\cos y=e^x\cos y(1+x)$　　[$\cos y$ 为常数]

三、二元函数的极值

1.无条件极值的计算步骤

36.求函数 $f(x,y,)=x^2+xy+y^2-3x-6y$ 的极值

解：①求一阶偏导数：

$f'(x,y)=2x+y-3$　，　$f''_y{}'(x,y)=x+2y-6$

②求驻点：$\begin{cases}2x+y-3=0\\x+2y-6=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$ 即点 M(0，3)为驻点

③再求二阶偏导数在点 M(0，3)得值

$A=f''_{xx}(0,3)\overset{f'_{x(x,\ y)}\text{对 x 进行求导}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}2$，$B=f''_{xy}(0,3)\overset{f'_{x(x,\ y)}\text{对 y 进行求导}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}1$

$C=f''_{yy}(0,3)\overset{f'_{y(x,\ y)}\text{对 y 再求导}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}2$

∴ $B^2-AC=1-4=-3<0$,而 $A=2>0$

则函数 f(x，y)在点 M(0,3)处有极小值 f(0，3)=-9(即将 x=0，y=3 带入题目式中求得 f(0，3)值)

第十章 概率论初步

一、事件的概率(含定义，加法公式)

1.古典型定义：$P_{(A)}=\frac{\text{事件 A 包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件数}}$

$=\frac{n}{m}$(即$\frac{\text{样本点数}}{\text{样本空间}}$)

37.从一副 52 张扑克牌中任意抽 5 张，其中没有 A 字牌得概率是______

解：$P_{(A)}=\frac{C_{48}^{5}}{C_{52}^{5}}=\frac{\frac{48\times47\times46\times45\times44}{5!}}{\frac{52\times51\times50\times49\times48}{5!}}=0.66$

2.性质：①对于任一事件 A,有 $0\le P_{(A)}\le1$

②若事件 A∈B(A 包含于 B)，则 $P_{(A)}\le P_{(B)}$，$P_{(B-A)}=P_{(A)}-P_{(B)}$

③加法公式：对于任意两个事件 A,B 有 $\boxed{P_{(A\cup B)}=P_{(A)}+P_{(B)}-P_{(AB)}}$

推论：①若 A、B 互不相容，则 $P_{(A\cup B)}=P_{(A)}+P_{(B)}\neq1$

②对任一事件 A，有 $P_{(A)}=1-P_{(\bar{A})}$ (A 的对立事件)

38.甲乙两人同时向一敌机射击。已知甲、乙击中敌机的概率分别为 0.6 和 0.5，甲乙同时击中敌机的概率为 0.3，求敌机被击中的概率。

解：设事件 A=“甲击中”，B=“乙击中”，C=“敌机被击中”(并集)显然，C= A∪B

$\therefore P_{(C)}=P_{(A\cup B)}=P_{(A)}+P_{(B)}-P_{(AB)}=0.6+0.5-0.3=0.8$

一、条件概率、乘法公式、独立性

1.条件概率：事件 A 在事件 B 已发生的条件下概率，称 A 对 B 的概率。

记为 $P_{(A|B)}=\frac{P_{(AB)}}{P_{(B)}}$ 类似的 $P_{(B|A)}=\frac{P_{(AB)}}{P_{(A)}}$

2.乘法公式：(由条件概率可得)

$P_{(AB)}=P_{(B)}\cdot P_{(A|B)}=P_{(A)}\cdot P_{(B|A)}$

39.已知 $P_{(A)}=0.5$，$P_{(B)}=0.6$，$P_{(B|A)}=0.4$，求 $P_{(A\cup B)}$

解：利用加法公式和乘法公式：

$P_{(A\cup B)}=P_{(A)}+P_{(B)}-P_{(AB)}=P_{(A)}+P_{(B)}-P_{(A)}\cdot P_{(B|A)}$

$=0.5+0.6-0.5\times0.4=1.1-0.2$

40 袋中放有 3 个红球，2 个白球，第一次取出一球，不放回，第二次再取一球，则两次都是红球的概率是多少？

解：设事件 A=第一次取到红球，B=第二次取到红球

∵ $P_{(A)}=\frac{3}{5}$，$P_{(B\mid A)}=\frac{2}{4}$(总数还剩 4 个)

∴ $P_{(AB)}=P_{(A)}\cdot P_{(B\mid A)}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

3.独立性：对事件 A 与 事件 B，若 $\boxed{P_{(AB)}=P_{(A)}\cdot P_{(B)}}$ ，简称 A,B 独立。

定理：①$P_{(AB)}\neq\emptyset$(空集)，有可能独立

②$\overline{A}$(A 的对立事件)与 B，A 与$\overline{B}$，$\overline{A}$与$\overline{B}$都相互独立。

41.甲乙两个气象台同时作天气预报。已知它们预报准确率分别是 0.8 与 0。85，求在一次预报中两台都预报准确的概率。

解：设 A=甲预报准确，B=乙预报准确，$P_{(A)}$=0.8，$P_{(B)}$ =0.85

∵ A、B 互相独立 ∴ $P_{(AB)}=P_{(A)}\cdot P_{(B)}$ =0.8×0.85=0.68

三 一维随机变量及其数字特征

1．高散型随机变量：如果随机变量 x 只取有限个或可列个(即可数的)数值，则称 x 为离散性随机变量。

2.随机变量 x 的概率分布(或分布列)：

X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…
P	p_1	p_2	p_3	…	p_i	…

性质：①非负性：$P_2\geq 0$，i=1，2……

②规范性：$\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$，即$p_1+p_2+\ldots\ldots=1$

42.设随机变量 x 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.1	0.1	a	0.3	0.2

①求常数 a ②求 P

解：①0.1+0.1+α+0.3+0.2=1 ∴α=0.3

②$P\{0.5\leq x<4\}=\{x=1\}+\{x=2\}+\{x=3\}$=0.1+0.3+0.3=0.7

3.随机变量得数字特征

(1)数学期望：$E_{(X)}=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$

(若$|x_i|\cdot p_i$收敛，则称级数的“和”为 X 的“数学期望”。体现了随机变量 X 取值的集中位置或平均水平。)

(2)方差：$D_{(X)}=E[x-E_{(X)}]^2=\sum_{i=1}^{\infty}[x_{i-E_{(X)}}]^2$(离散型为非负数)

均方差：$\sigma_{(X)}=\sqrt{D(X)}=\sqrt{E[x-E(X)]^2}$

43.设随机变量的分布列为

x	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.3	0.2	0.1	0.3

求①$E_{(X)}$ ②$D_{(X)}$及$\sigma_{(X)}$

解：①$E_{(X)}=0.1\times(-2)+0.3\times(-1)+0.2\times0+0.1\times1+0.3\times2=0.2$

②$D_{(X)}=E[x_i-E_{(X)}]^2=(-2-0.2)^2\times0.1+(-1-0.2)^2\times0.3+(0-0.2)^2\times0.2+(1-0.2)^2\times0.3=1.96$

$\sigma_{(X)}=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1.96}=1.4$